

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΒΟΛΗ ΕΝΟΣ ΙΞΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ ΑΠΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΑΓΩΓΟ

Διονύσης Πέττας¹, Γιώργος Καραπέτσας², Ιωάννης Δημακόπουλος¹, Ιωάννης Τσαμόπουλος¹

¹Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών 26054 Πάτρα

²Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας 38334 Βόλος

e-mail: d.pettas@chemeng.upatras.gr, gkarapetsas@gmail.com, dimako@chemeng.upatras.gr,
tsamo@chemeng.upatras.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Κατά την εκβολή ιξωδοελαστικών ρευστών μπορεί να δημιουργηθούν αστάθειες οι οποίες είναι πολύ σημαντικές σε διάφορες βιομηχανικές εφαρμογές κατά τις οποίες λαμβάνει χώρα μορφοποίηση πολυμερών. Για την προσομοίωση αυτής της διεργασίας χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο των μικτών πεπερασμένων στοιχείων μαζί με μια ελλειπτική μέθοδο δημιουργίας του πλέγματος. Για την μοντελοποίηση της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς του ρευστού χρησιμοποιήσαμε το μοντέλο Phan-Thien-Tanner και για την επίλυση του χρησιμοποιήθηκε η τεχνική EVSS-G σε συνδυασμό με την μέθοδο SUPG για την διακριτοποίηση της καταστατικής εξίσωσης. Πραγματοποιήσαμε γραμμική ανάλυση ευστάθειας στην διδιάστατη αυτή ροή σύμφωνα με την οποία το σύστημα γίνεται ασταθές πάνω από μια κρίσιμη τιμή του αριθμού Wi όπου τα πεδία ταχύτητας, πίεσης και τάσεων αρχίζουν να αυξάνουν εκθετικά με το χρόνο με ή χωρίς σύγχρονη περιοδική μεταβολή. Η αστάθεια γεννάται σε μια περιοχή γύρω από το σημείο εκβολής που είναι και ιδιαίρον σημείο για τη ροή και η διαταραχή εκτείνεται 2-5 ακτίνες μακριά από αυτό, ανάλογα το λόγο των τριχοειδών προς τις ιξώδεις δυνάμεις, αριθμός Ca , ενώ αφήνει το υπόλοιπο ρευστό σχεδόν αδιατάρακτο. Πραγματοποιούμε παραμετρική ανάλυση μεταβάλλοντας τον αριθμό Ca καθώς και τις σχετικές ρεολογικές παραμέτρους του καταστατικού μοντέλου των τάσεων προκειμένου να μελετήσουμε την επίδραση των παραμέτρων αυτών στην ευστάθεια της ροής κατά την εκβολή.

Λέξεις Κλειδιά: ευστάθεια, γραμμική ανάλυση, ιξωδοελαστικό μοντέλο, πεπερασμένα στοιχεία, ιδιοτιμή, εκβολή

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εκβολή ενός πολυμερικού ρευστού είναι μια ευρέως διαδεδομένη διεργασία στην βιομηχανία των πολυμερών. Τα περισσότερα πολυμερή που χρησιμοποιούνται στην βιομηχανία έχουν υψηλό μοριακό βάρος και συνήθως οι πολυμερικές αλυσίδες διαπλέκονται μεταξύ τους στο τήγμα σε μεγάλο βαθμό με αποτέλεσμα η συμπεριφορά τους να διαφέρει δραστικά από εκείνη των Νευτωνικών ρευστών. Κατά την διεργασία της εκβολής το ρευστό μόλις εξέρχεται από το καλούπι διογκώνεται και επιπλέον μετά από μια κρίσιμη τιμή της διατμητικής τάσης (γύρω στο 0.1 – 0.3 MPa) είναι δυνατόν να εμφανιστούν ποικίλες αστάθειες οι οποίες επηρεάζουν σημαντικά την ποιότητα του τελικού προϊόντος. Οι αστάθειες αυτές είναι ένα σημαντικό πρόβλημα για τη βιομηχανία και τα τελευταία 40 χρόνια έχουν μελετηθεί, κυρίως πειραματικά, από διάφορους ερευνητές, Cogswell (1977), Kalika & Denn, (1987), Kissi & Piau & Toussaint (1997), ωστόσο η κατανόηση των μηχανισμών που οδηγούν σε αστάθεια είναι μέχρι σήμερα ελλιπής. Πολύ πρόσφατα οι Karapetsas & Tsamopoulos (2013) παρουσίασαν μια θεωρητική μελέτη στην οποία πραγματοποίησαν γραμμική ανάλυση ευστάθειας του

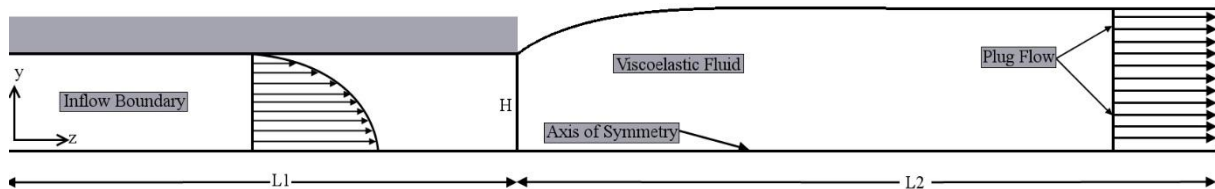
προβλήματος «stick-slip» (στο όριο δηλαδή που το ρευστό έχει πάρα πολύ μεγάλη επιφανειακή τάση που έχει ως αποτέλεσμα η επιφάνεια του εκβόλου να παραμένει επίπεδη) και έδειξαν ότι η ροή γίνεται ασταθής μετά από μια κρίσιμη τιμή του αριθμού Weissenberg. Στην παρούσα εργασία κάνουμε πληρέστερη ανάλυση του προβλήματος της ευστάθειας της εκβολής θεωρώντας ότι οι επιφανειακές δυνάμεις έχουν πεπερασμένη τιμή, επιτρέποντας έτσι την παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας του εκβόλου, και πραγματοποιούμε γραμμική ανάλυση ευστάθειας χρησιμοποιώντας την μέθοδο Arnoldi για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών.

2. ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

2.1 Αδιαστατοποίηση εξισώσεων

Θεωρούμε την μόνιμη δισδιάστατη ροή εκβολής ενός ιξωδοελαστικού ρευστού στο οποίο η κινούσα δύναμη είναι η διαφορά πίεσης. Το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο με σταθερή πυκνότητα, ρ , και επιφανειακή τάση, σ , χρόνο χαλάρωσης, λ και ολικό ιξώδες μηδενικής διάτμησης $\mu = \mu_s + \mu_p$, όπου μ_s και μ_p είναι τα αντίστοιχα ιξώδη του διαλύτη και του πολυμερούς, αντίστοιχα. Στο σχήμα 2.1 φαίνεται το ήμισυ του χωρίου (μέχρι το επίπεδο συμμετρίας) που σχηματίζει η ροή σε μόνιμη κατάσταση. Το ιξωδοελαστικό ρευστό, αρχικά, ρέει μέσα στον επίπεδο αγωγό διατομής $2H$ και μήκους L_1 . Το πεδίο της ταχύτητας καθώς και το πεδίο της πίεσης αναδιατάσσεται καθώς το ρευστό εξέρχεται από τον αγωγό μέχρι που σε απόσταση L_2 από την έξοδο δημιουργείται εμβολική ροή.

Αδιαστατοποιούμε όλα τα μήκη με το μισό ύψος του αγωγού (H), και την ταχύτητα με την μέση ταχύτητα στην είσοδο του αγωγού, v , ενώ η πίεση και οι τάσεις αδιαστατοποιούνται με τον ιξώδη τρόπο, $\tilde{p} / \tilde{\mu} v / H$. Οπότε οι αδιάστατοι αριθμοί που προκύπτουν είναι ο αριθμός Reynolds, τον οποίο στα πλαίσια της έρπουσας ροής τον θεωρούμε μηδέν, ο αριθμός Weissenberg $wi = \lambda v / H$, ο αριθμός τριχοειδών δυνάμεων $Ca = \mu v / \sigma$, ο λόγος του Νευτωνικού διαλύτη ως προς το συνολικό ιξώδες μηδενικής διάτμησης, $\beta = \mu_s / \mu$ και τους γεωμετρικούς λόγους αποστάσεων $l_1 = L_1 / H$ και $l_2 = L_2 / H$.



Σχήμα 2.1 Σχηματική απεικόνιση της ροής εκβολής από επίπεδο αγωγό. Στο σχήμα παρατηρούμε το σύστημα συντεταγμένων και τα διαστατικά μεγέθη του προβλήματος καθώς και την επιβολή συνοριακών συνθηκών στην είσοδο και στην έξοδο του χωρίου.

2.2 Μαθηματική Μοντελοποίηση

Η ροή διέπεται από την αρχή διατήρησης της ορμής και της μάζας, οι οποίες με την παραδοχή της έρπουσας ροής, παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{P} - \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}} = 0, \quad (2.1.1)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0, \quad (2.1.2)$$

όπου \underline{v} και \underline{P} συμβολίζουμε το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας και το βαθμωτό πεδίο πίεσης, αντίστοιχα και $\underline{\underline{\tau}}$ είναι ο τανυστής των τάσεων, τον οποίο τον διαχωρίζουμε σε έναν τανυστή με αμιγώς ιξώδη συμπεριφορά $2\beta \dot{\underline{\underline{\gamma}}}$ και έναν με ιξωδοελαστική συμπεριφορά $\underline{\underline{\tau}}_e$,

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\beta \underline{\underline{\gamma}} + \underline{\underline{\tau}}_p, \quad (2.1.3)$$

όπου $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ είναι ο τανυστής ρυθμού διάτμησης και ορίζεται ως $\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}}^T)$.

Για να λάβουμε υπόψη την ιξωδοελαστικότητα του υλικού μας χρησιμοποιούμε το μοντέλο Phan-Thien-Tanner (PTT) στην εκθετική του μορφή, Phan-Thien (1978),

$$\exp\left(\frac{\varepsilon}{1-\beta} \text{Wi trace}(\underline{\underline{\tau}}_p)\right) \underline{\underline{\tau}}_p + \text{Wi} \underline{\underline{\tau}}_p^\circ - 2(1-\beta)\underline{\underline{\gamma}} = 0, \quad (2.1.4)$$

όπου το « \circ » υποδηλώνει την άνω συναγόμενη Maxwell παράγωγο η οποία είναι:

$$\underline{\underline{\tau}}_p^\circ = \frac{D \underline{\underline{\tau}}_p}{D t} - \left[\underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}} \right]^T - \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}}, \quad (2.1.5)$$

όπου $\underline{\underline{x}}$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε δεύτερης τάξης τανυστής.

Στο μοντέλο PTT οι ιδιότητες του ιξωδοελαστικού ρευστού καθορίζονται από την παράμετρο ε του μοντέλου. Αυτή η παράμετρος θέτει ένα άνω όριο στο εκτατικό ιξώδες, το οποίο αυξάνεται καθώς η παράμετρος μειώνεται, ενώ επηρεάζει και το διατμητικό ιξώδες και την ιξωδοελαστικότητα του υλικού.

2.3 Συνοριακές συνθήκες

Κατά μήκος της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού $l_1 < z \leq l_1 + l_2$, τα πεδία ταχύτητας και πίεσης ακολουθούν ένα τοπικό ισοζύγιο δυνάμεων μεταξύ των τριχοειδών δυνάμεων, των τάσεων και της πίεσης του περιβάλλοντος ρευστού. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι η πίεση του περιβάλλοντος ρευστού είναι ίση με μηδέν στην διεπιφάνεια (πίεση αναφοράς).

$$\underline{\underline{n}} \cdot (-P \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}) = \frac{2H_c}{Ca} \underline{\underline{n}} \quad (2.3.1)$$

όπου $\underline{\underline{n}}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην ελεύθερη επιφάνεια και $2H_c$ είναι η μέση καμπυλότητα της, η οποία ορίζεται ως:

$$2H_c = -\underline{\underline{\nabla}}_s \cdot \underline{\underline{n}}, \quad \underline{\underline{\nabla}}_s = (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{n}} \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{\nabla}} \quad (2.3.2)$$

Κατά μήκος της ελεύθερης επιφάνειας επιβάλλουμε την συνοριακή συνθήκη μη διείδυσης, δηλαδή η κάθετη στην επιφάνεια συνιστώσα της ταχύτητας πρέπει να είναι ίση με το μηδέν:

$$\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{n}} = 0 \quad (2.3.3)$$

Κατά μήκος του τοιχώματος ($y = 1, 0 \leq z \leq l_1$), επιβάλλουμε την συνηθισμένη συνοριακή συνθήκη μη-ολίσθησης, μη διείδυσης,

$$\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{n}} = 0, \quad \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{t}} = 0 \quad (2.3.4)$$

όπου $\underline{\underline{n}}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα και $\underline{\underline{t}}$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στο τοίχωμα. Στο επίπεδο συμμετρίας $y = 0, l_1 \leq z \leq l_1 + l_2$ επιβάλλουμε τη συνθήκη συμμετρίας $\partial v_z / \partial y = 0$.

Συνοριακές συνθήκες πρέπει να τοποθετηθούν στην είσοδο και στην έξοδο της περιοχής επίλυσης της ροής. Στην έξοδο της ροής επιβάλλουμε ομοίμορφο προφίλ ταχύτητας $dv_z / dz = 0$ σε συνδυασμό με την χρήση των Open Boundary Conditions (OBC), Papanastasiou, & Malamataris, & Ellwood (1992). Ενώ για $z = 0$ και $0 \leq y \leq 1$ εκτός από το ισοζύγιο της ορμής σε πλήρως ανεπτυγμένη μορφή εφαρμόζουμε συνοριακές συνθήκες και για το πολυμερικό τμήμα των τάσεων. Ακολουθούμε προσέγγιση αντίστοιχη με εκείνη των Karapetsas & Tsamopoulos (2008, 2009, 2013), οι οποίοι

θεωρήσαν ότι στην είσοδο του αγωγού υπάρχει πλήρως ανεπτυγμένη ροή και έλυσαν τις εξισώσεις στην απλοποιημένη τους μορφή σε μια διάσταση.

3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

3.1 Ελλειπτική γεννήτρια πλέγματος

Για την κατασκευή του πλέγματος μας η περιοχή που καταλαμβάνει το ρευστό (y, z) απεικονίζεται σε ένα υπολογιστικό χωρίο (ξ, η) , το οποίο επιλέγεται ως ο χώρος τον οποίο το ρευστό θα καταλάμβανε εάν παρέμενε απαραμόρφωτο. Σε αυτό το χωρίο δημιουργούμε ένα ομοιόμορφο πλέγμα με αλγεβρική μετατόπιση κόμβων προς την κρίσιμη περιοχή του ιδιάζοντος σημείου και διαμέσου της διαδικασίας απεικόνισης, το πλέγμα στο φυσικό χωρίο ακολουθεί τις διάφορες παραμορφώσεις της ροής. Αυτό επιτυγχάνεται με την επίλυση των εξισώσεων για την ελλειπτική γεννήτρια πλέγματος. Ο αναγνώστης που θέλει να εμβαθύνει στο θέμα για την μέθοδο αυτή μπορεί να συμβουλευθεί τις δημοσιεύσεις Dimakopoulos & Tsamopoulos (2003), Karapetsas & Tsamopoulos (2008).

3.2 Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων μεικτού τύπου

Προσεγγίζουμε την ταχύτητα και την θέση των κόμβων με Lagrangian συναρτήσεις βάσης 6 κόμβων, ϕ^i , και την πίεση καθώς και όλες τις τάσεις με συναρτήσεις βάσης 3 κόμβων. Έπειτα, εφαρμόζουμε τη μέθοδο Galerkin και κάνοντας χρήση του θεωρήματος της απόκλισης λαμβάνουμε την ασθενή μορφή των εξισώσεων διατήρησής ορμής και μάζας,

$$\int_{\Omega} -P \nabla \phi^i + \nabla \phi^i \cdot \underline{\underline{\Sigma}} + 2 \nabla \phi^i \cdot \underline{\underline{\gamma}} J d \Omega + \int_{\partial \Omega} \underline{\underline{n}} \cdot (-P \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}) \phi^i \underline{\underline{Q}} d \Gamma = 0 \quad (3.2.1)$$

$$\int_{\Omega} \psi^i \nabla \cdot \underline{\underline{v}} J d \Omega = 0 \quad (3.2.2)$$

Όπου $d \Omega$ και $d \Gamma$ είναι ο διαφορικός όγκος και το διαφορικό επικαμπύλιο μήκος του χωρίου της ροής, ενώ J και $\underline{\underline{Q}}$ είναι οι αντίστοιχοι Ιακωβιανοί πίνακες μετασχηματισμού από τον φυσικό χώρο στον υπολογιστικό. Παρόμοια, η ασθενής μορφή των εξισώσεων κατασκευής του πλέγματος είναι,

$$\int_{\Omega} (\varepsilon_1 S + (1 - \varepsilon_1)) \nabla \xi \cdot \nabla \phi^i J d \Omega = 0 \quad (3.2.3)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \eta \cdot \nabla \phi^i J d \Omega = 0 \quad (3.2.4)$$

Η συνεχής προσέγγιση των παραγώγων των ταχυτήτων γίνεται με την βοήθεια των εξισώσεων:

$$\int_{\Omega} \psi^i (\underline{\underline{G}} - \nabla \underline{\underline{v}}) J d \Omega = 0 \quad (3.2.5)$$

Τέλος, λόγω του υπερβολικού χαρακτήρα του μοντέλου των πολυμερικών τάσεων είναι αναγκαία η χρήση της μεθόδου SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin) η οποία προτάθηκε από τους Brooks & Hughes(1982):

$$\int_{\Omega} \left\{ Y \left(\frac{\tau_p}{\rho} \right) \underline{\underline{\Sigma}} + W i \underline{\underline{\Sigma}} + 2 W i (1 - \beta) \underline{\underline{D}} - 2 (1 - \beta) \left[1 - Y \left(\frac{\tau_p}{\rho} \right) \right] \underline{\underline{D}} \right\} \chi^i J d \Omega = 0 \quad (3.2.6)$$

Όπου η συνάρτηση βάρους χ^i σχηματίζονται από τον συνδυασμό των συναρτήσεων βάσης των πεπερασμένων στοιχείων σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση,

$$\chi^i = \psi^i + \frac{h_{ch}}{|\underline{\underline{v}}|} \underline{\underline{v}} \cdot \nabla \psi^i \quad (3.2.7)$$

Όπου $|\underline{v}|$ είναι το μέτρο της μέσης ταχύτητας η οποία υπολογίζεται για κάθε στοιχείο και $h_{e,h}$ είναι το χαρακτηριστικό μήκος του στοιχείου.

4. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

4.1 Διατύπωση

Οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφουν τη ροή εκβολής ιξωδοελαστικού ρευστού στη μόνιμη κατάσταση. Με σκοπό την διερεύνηση της ευστάθειας της ροής εφαρμόζουμε την γραμμική ανάλυση ευστάθειας, θεωρώντας απειροελάχιστες διδιάστατες διαταραχές γύρω από την μόνιμη κατάσταση της ροής. Τα ανωτέρω εκφράζονται ως:

$$\begin{bmatrix} \underline{v}(\eta, \xi, t) \\ P(\eta, \xi, t) \\ \underline{G}(\eta, \xi, t) \\ \underline{\Sigma}(\eta, \xi, t) \\ \underline{x}(\eta, \xi, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_b(\eta, \xi) \\ P_b(\eta, \xi) \\ \underline{G}_b(\eta, \xi) \\ \underline{\Sigma}_b(\eta, \xi) \\ \underline{x}_b(\eta, \xi) \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} \underline{v}'(\eta, \xi) \\ P'(\eta, \xi) \\ \underline{G}'(\eta, \xi) \\ \underline{\Sigma}'(\eta, \xi) \\ \underline{x}'(\eta, \xi) \end{bmatrix} e^{-\lambda t}, \delta \rightarrow 0 \quad (4.1.1)$$

όπου $\underline{x} = [y(\eta, \xi, t), z(\eta, \xi, t)]$, $\underline{x}_b = [y_b(\eta, \xi, t), z_b(\eta, \xi, t)]$ and $\underline{x}' = [y'(\eta, \xi, t), z'(\eta, \xi, t)]$ και λ είναι ο όρος εκθετικής απόσβεσης/ενίσχυσης της διαταραχής. Οι πρώτοι όροι του δεξιού μέλους της σχέσης εκπροσωπούν την λύση στην μόνιμη κατάσταση ενώ οι δεύτεροι όροι εκπροσωπούν την διαταραχή στο σύστημα μας, ενώ παράλληλα υποθέτουμε ότι η γραμμική διαταραχή έχει εκθετική εξάρτηση από τον χρόνο.

Εισάγοντας τις παραπάνω σχέσεις στις εξισώσεις (3.1.1-7) και παραλείποντας όρους ανώτερους της δεύτερης τάξης προκύπτει το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών, το οποίο είναι της μορφής:

$$\mathbf{J} \underline{w} = \lambda \mathbf{M} \underline{w} \quad (4.1.2)$$

όπου \mathbf{J} και \mathbf{M} είναι ο Ιακωβιανός πίνακας και ο πίνακας μάζας, αντίστοιχα, ενώ λ είναι οι ιδιοτιμές και \underline{w} είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

4.2 Arnoldi Method

Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών είναι η μέθοδος Arnoldi η οποία μας επιτρέπει τον υπολογισμό μόνο των ιδιοτιμών που μας ενδιαφέρουν, Saad (1980,2011), Lehoucq R. B., Sorensen D. C., and Yang C 1998. Για να καθορίσουμε αν η ροή είναι ευσταθής ή ασταθής ενδιαφερόμαστε για τις ιδιοτιμές που έχουν το μικρότερο πραγματικό μέρος. Για τον λόγο αυτό εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό «μετατόπισης αντιστροφής» («shift-invert»), ο οποίος μετασχηματίζει το πρόβλημα στο ακόλουθο:

$$K \underline{w} = \nu \underline{w}, \text{ όπου } K = (A - sM)^{-1} \text{ και } \nu = \frac{1}{\lambda - s} \quad (4.1.3)$$

όπου s είναι ένα σημείο πάνω στο μιγαδικό επίπεδο και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές με το μικρότερο μέτρο γύρω από το s . Η μέθοδος έχει εφαρμοστεί σε ποικίλες ροές στο παρελθόν από διάφορους ερευνητές με μεγάλη επιτυχία, αφού προσφέρει ακριβή και γρήγορα αποτελέσματα, π.χ. Christodoulou & Scriven (1988), Karapetsas & Tsamopoulos (2013).

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Έχοντας τη γνώση των φασματικών αποτελεσμάτων του προβλήματος «stick-slip» γενικευμένο για ιξωδοελαστικές ροές με την χρήση του μοντέλου Phan-Thien-Tanner, (Karapetsas & Tsamopoulos (2013)), ότι στο όριο που οι τριχοειδείς δυνάμεις τείνουν στο άπειρο η ροή εκβολής μπορεί να έχει μια

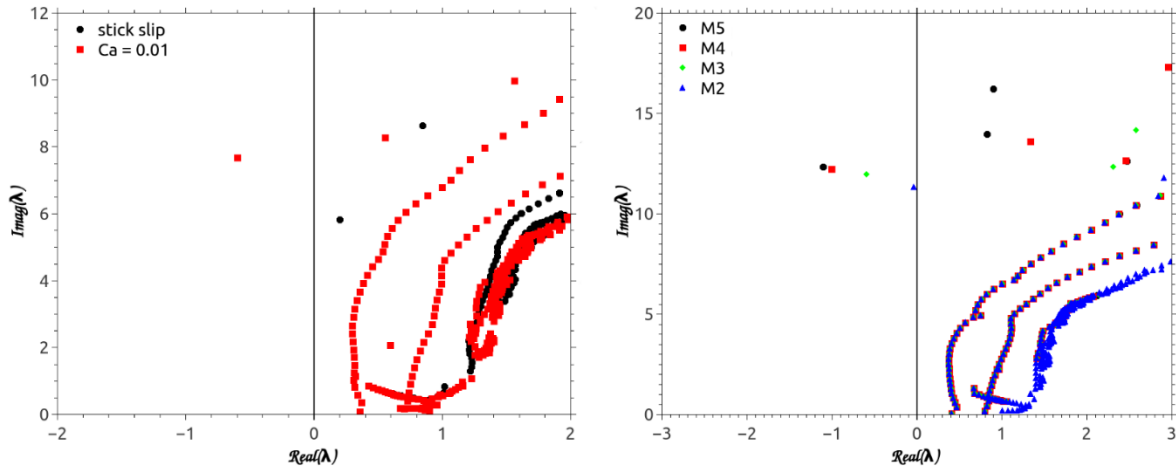
ασταθή ιδιοτιμή και ο κρίσιμος αριθμός Weissenberg εντοπίζεται για περίπου στο $w_i = 2.5$ για επίπεδο αγωγό. Στόχος της εργασίας αυτής είναι να διερευνήσουμε εάν η παρουσία της ιδιοτιμής αυτής υπάρχει και σε μεγαλύτερες τιμές του C^a . Στο σχήμα 5.1 αριστερά παρατηρούμε την σύγκριση του φάσματος της ροής «stick-slip» ($C^a = 0.0$) με την ροή εκβολής για μικρό αριθμό τριχοειδών δυνάμεων, $C^a = 0.01$, ο αριθμός w_i είναι ίσος με 2.0. Τα δύο φάσματα έρχονται σε καλή συμφωνία μεταξύ τους και ενώ η ροή εκβολής εμφανίζει ένα επιπλέον συνεχές κλάδο στο φάσμα, για τον οποίο πιστεύουμε ότι προέρχεται από την ταλάντωση της ελεύθερης επιφάνειας. Παρόλα αυτά, η ροή εκβολής εμφανίζει μια ιδιοτιμή η οποία γίνεται ασταθής με μικρότερο αριθμό w_i από το την ροή stick-slip.

Συνήθως κατά διαδικασία της γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας δημιουργούνται μαζί με τις ιδιοτιμές της ροής κάποιες πλασματικές ιδιοτιμές, οι οποίες μπορεί να προέρχονται είτε από την ίδια την μέθοδο Arnoldi λόγω π.χ. έλλειψης ορθογωνιότητας μεταξύ των διανυσμάτων βάσης, είτε λόγω της διακριτοποίησης των πεπερασμένων στοιχείων, τα οποία προσεγγίζουν ένα συνεχές φυσικό πρόβλημα με διακριτά μαθηματικά. Για αυτό τον λόγο, είναι επιτακτική ανάγκη να διασφαλίσουμε ότι η ιδιοτιμή που παρατηρούμε να είναι ασταθής για $C^a = 0.01$ προέρχεται από την ροή και δεν είναι πλασματική. Για την πιστοποίηση του φάσματος ιδιοτιμών όπως έδειξαν οι Karapetsas & Tsamopoulos (2013) είναι σημαντικό να διεξαχθούν μια σειρά αριθμητικών υπολογισμών προκειμένου να διαπιστωθεί ότι οι ιδιοτιμές που μας ενδιαφέρουν συγκλίνουν με πύκνωση του πλέγματος. Τα πλέγματα καθώς και οι ιδιότητές τους (αριθμός στοιχείων σε κάθε κατεύθυνση, συνολικών αγνώστων, ελάχιστο μέγεθος στοιχείων κτλ.) που χρησιμοποιήθηκαν για το σκοπό αυτό παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 1). Ο αριθμός δίπλα στο γράμμα M υποδηλώνει τον αριθμό των επιπέδων τοπικής πύκνωσης που προσθέτουμε γύρω από αυτό το ιδιαίζον σημείο που παρουσιάζεται στην έξοδο από τον αγωγό.

Mesh	No. of 1D elements in the (y, z) direction	No. of refinement levels	No. of triangular elements	No. of unknowns (base state)	No. of unknowns (stability analysis)	l_1	l_2	Δz_{min}	$\frac{\Delta z_{min}}{\Delta y_{min}}$
M0	(40, 250)	0	20000	265234	263118	10	25	7.4×10^{-3}	0.99
M1	(40, 250)	1	21240	310100	307984	10	25	3.8×10^{-3}	0.98
M2	(40, 250)	2	22803	373762	371598	10	25	1.8×10^{-3}	0.99
M3	(40, 250)	3	22803	414818	412654	10	25	9.4×10^{-3}	1.03
M4	(40, 250)	4	22803	428084	425920	10	25	4.7×10^{-4}	1.03
M5	(40, 250)	5	22803	431526	429410	10	25	1.7×10^{-4}	1.03

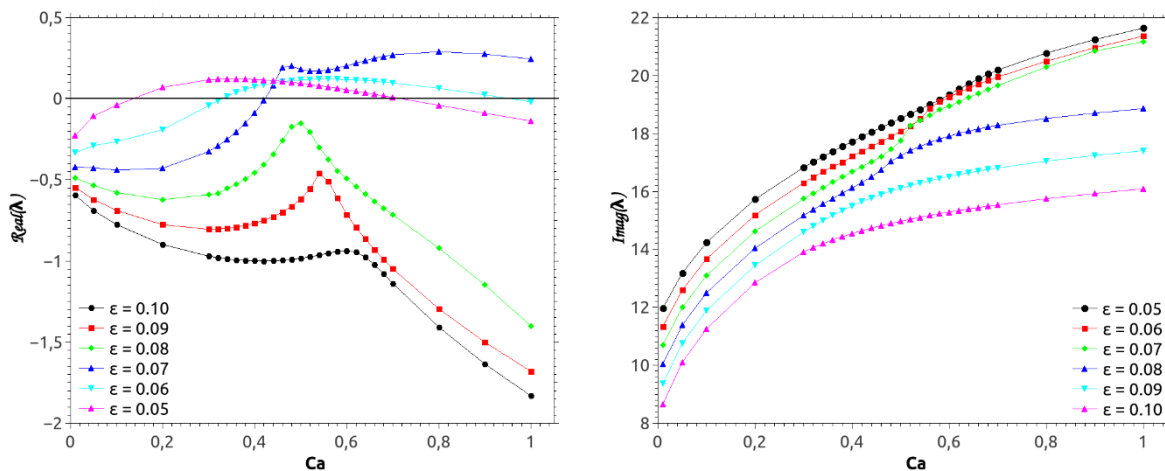
Πίνακας 5.1. Στον πίνακα αυτό παρατηρούμε τις ιδιότητες των πλεγμάτων κατηγορίας M.

Στο δεξιά μέρος του σχήματος 5.1 παρουσιάζουμε το φάσμα ιδιοτιμών για 4 διαφορετικά πλέγματα και παρατηρούμε ότι η πιο επικίνδυνη ιδιοτιμή (η ιδιοτιμή με το μικρότερο πραγματικό μέρος) συγκλίνει αυξάνοντας την διακριτοποίηση γύρω από το ιδιαίζον σημείο. Παρακάτω, η ανάλυση θα συνεχιστεί χρησιμοποιώντας το πλέγμα M3.



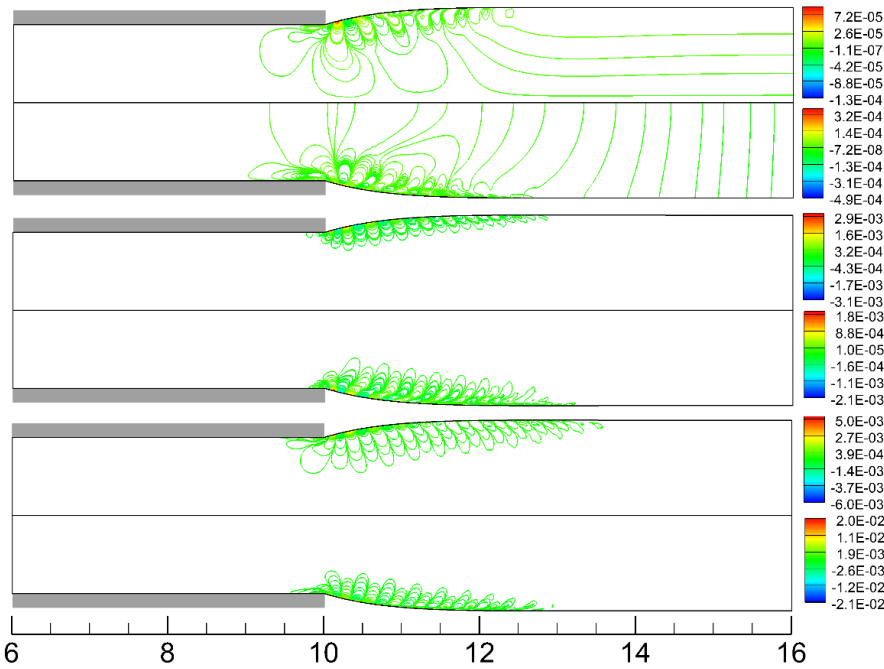
Σχήμα 5.1 Σύγκριση του φάσματος από την ροή «stick-slip» (αριστερά) με την ροή εκβολής για $w_i = 2.0$, $\varepsilon = 0.05$, $\beta = 0.0$, χρησιμοποιήθηκε το πλέγμα M_3 . Δεξιά, έλεγχος της ιδιοτιμής με σύγκριση με το πλέγμα για $w_i = 2.0$, $Ca = 0.01$, $\varepsilon = 0.10$, $\beta = 0.0$.

Αφού εντοπίσαμε την κρίσιμη ιδιοτιμή του προβλήματος εκβολής κάνουμε παραμετρική ανάλυση για να παρατηρήσουμε πως μεταβάλλεται και κατά συνέπεια πως επηρεάζεται η ευστάθεια του συστήματός μας με αλλαγή του $Ca \in [0.01 - 1.0]$ και αλλαγή του $\varepsilon \in [0.01 - 1.0]$. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι το πραγματικό μέρος μιας ιδιοτιμής είναι συσχετιζόμενο με την ενίσχυση ή την απόσβεση της διαταραχής που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα με τον χρόνο ενώ τον φανταστικό μέρος της ιδιοτιμής σχετίζεται με την συχνότητα της διαταραχής. Στο σχήμα 5.2 δεξιά παρατηρούμε ότι αυξάνοντας τον αριθμό Ca η διαταραχή γίνεται πιο υψίσυχη, καθώς η αύξηση του αριθμού αυτού σημαίνει μείωση της επίδρασης της επιφανειακής τάσης με αποτέλεσμα να επιτρέπονται διαταραχές μεγαλύτερης συχνότητας. Αξιοσημείωτη είναι η συμπεριφορά του πραγματικού μέρους της ιδιοτιμής, δηλαδή ο όρος απόσβεσης, όπου η συμπεριφορά είναι μη μονότονη και για μια περιοχή του αριθμού Ca εμφανίζεται το σύστημα να γίνεται ευσταθές (Σχήμα 5.2).



Σχήμα 5.2 Αριστερά, αλλαγή του πραγματικού μέρους της κρίσιμης ιδιοτιμής σε σχέση με το Ca , δεξιά αλλαγή του φανταστικού μέρους της ιδιοτιμής σε σχέση με το Ca .

Το γεγονός ότι η ιδιοτιμή, την στιγμή που έχουμε κρίσιμες συνθήκες είναι φανταστική, σηματοδοτεί την έναρξη μιας τοπικής διακλάδωσης Hopf κατά την οποία η λύση μας μετατρέπεται περιοδική στον χρόνο. Αυτό παρατηρείται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 5.3) που όπου το ροϊκό πεδίο καθώς και το πεδίο πίεσης μετατρέπεται σε περιοδικό, ενώ διαφαίνεται ότι γεννιάται από το ιδιάζον σημείο στο τέλος τους αγωγού. Οι διαταραχές αφορούν μια κλειστή περιοχή γύρω από την ελεύθερη επιφάνεια ρευστού-αέρα.



Σχήμα 5.3 Χωρική παρουσίαση των συνιστωσών του ιδιοδιανύσματος από επίπεδο αγωγό. Παρατηρούμε τις ισούψειες καμπύλες (α) v_x', v_z' (β) p', τ_{xy}' (γ) τ_{yz}', τ_{zz}' στο πάνω και στο κάτω μέρος του σχήματος αντίστοιχα $w_i = 2.0$, $Ca = 0.5$, $\epsilon = 0.05$, $\beta = 0.0$, $l_1 = 10$, $l_2 = 25$ (για σαφήνεια παρουσιάζουμε την περιοχή $6 \leq z \leq 16$). Η ιδιοτιμή που αναφερόμαστε είναι: $\lambda = -0.982 + i18.522$. Mesh M3 is used.

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Έγινε προσομοίωση της διεργασίας εκβολής ενός ιξωδοελαστικού ρευστού με πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα την ελλειπτική μέθοδο κατασκευής του πλέγματος προκειμένου να υπολογίσουμε με ακρίβεια τη θέση της ελεύθερης επιφάνειας. Για την μοντελοποίηση της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς του ρευστού χρησιμοποιήσαμε το μοντέλο Phan-Thien-Tanner και το επιλύσαμε σε συνδυασμό με την τεχνική EVSS-G καθώς και με τη μέθοδο SUPG. Έγινε ανάλυση ευστάθειας της ροής εκβολής για επίπεδο αγωγό με την μέθοδο Arnoldi και παρατηρήσαμε την ιδιοτιμή η οποία αναγκάζει την ροή να γίνει περιοδική στον χρόνο και είναι ποιοτικά ίδια με αυτή που παρατήρησαν οι Karapetsas & Tsamopoulos (2013). Τα θεωρητικά πειράματα είναι σύμφωνα με την υπόθεση των Kissi & Piau & Toussaint (1997), δηλαδή ότι δεν είναι αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη της αστάθειας «δέρματος-καρχαρία» η παραβίαση της συνθήκης μη ολίσθησης, σε αντίθεση με τον Ramamurthy (1987) ο οποίος υποστήριζε ότι αυτού του είδους αστάθειες μπορούν να εξαφανιστούν αυξάνοντας της πρόσφυση μεταξύ του ρευστού και τοιχωμάτων. Τέλος, παρουσιάσαμε τη χωρική μορφή των συνιστωσών του ιδιοδιανύσματος στο οποίο φαίνεται καθαρά ότι η διαταραχή γεννιάται γύρω από το ιδιάζον σημείο.

7. ΕΥΧΑΡΙΣΤΕΙΕΣ

Οι συγγραφείς Δ.Π., Ι.Δ. και Ι.Τ. θα ήθελαν να ευχαριστήσουν την οικονομική υποστήριξη του προγράμματος «Αριστεία» (FilcoMicra, αριθμός προγράμματος 1918) και ο Γ.Κ την οικονομική υποστήριξη του προγράμματος στο πλαίσιο της Δράσης «Ενίσχυση Μεταδιδακτόρων Ερευνητών/τριών» (EIFVM, αριθμός προγράμματος PE8/906), με την συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής ένωσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Brooks A. N. and Hughes T. J. R., “Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 32, (1982) 199
2. Christodoulou K.N., Scriven L.E. “Finding Leading Modes of a Viscous Free Surface Flow: An Asymmetric Generalized Eigenproblem”, (1988)
3. Dimakopoulos Y., Tsamopoulos J., A quasi-elliptic transformation for moving boundary problems with large anisotropic deformations, *J. Comp. Phys.* 192 (2003) 494–522.
4. El Kissi N., Piau J. M., Toussaint F., “Sharkskin and cracking of polymer melt extrudates”, *J. Non-Newt. Fluid Mech.* 68 (1997) 271-290
5. Karapetsas G., Tsamopoulos J., Steady extrusion of viscoelastic materials from an annular die, *J. Non Newt. Fluid Mech.* 154 (2008) 136152.
6. Karapetsas G., Tsamopoulos J., On the stick-slip flow from slit and cylindrical dies of a Phan-Thien and Tanner fluid model. I. steady state, *Physics of Fluids* 21 (12) (2009) 123101.
7. Karapetsas G., Tsamopoulos J., On the stick-slip flow from slit and cylindrical dies of a Phan-Thien and
8. Lehoucq R. B., Sorensen D. C., and Yang C., *ARPACK User’s Guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods* (SIAM, Philadelphia, PA, 1998).
9. Papanastasiou T.C., Malamataris N., Ellwood K., A new outflow boundary condition, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 14 (1992) 587–608.
10. Ramamurthy A.V., “Wall slip in viscous fluids and influence of the materials of construction” *J.Rheol.* 30, 337-357 (1986)
11. Phan-Thien N., A nonlinear network viscoelastic model, *Journal of Rheology* 22 (3) (1978) 259–283
12. Saad Y., “Variations of Arnoldi’s method for computing eigenelements of large unsymmetric matrices,” *Linear Algebr. Appl.* 34, 269–295 (1980).
13. Saad Y. “Numerical methods for large eigenvalue problems” (2011)

ABSTRACT

It is widely known that extrusion of viscoelastic materials may lead to various instabilities which are of major importance in applications, limiting the production rate and product quality. In order to address this significant problem and to the mechanism leading to these instabilities we examine the linear stability of the steady planar die swell problem for a viscoelastic fluid. For the simulation of this process the mixed finite element method is combined with a quasi-elliptic mesh generation scheme in order to capture the deformation of the free surface of the fluid. The viscoelastic behaviour of the fluid is modelled using the exponential Phan-Thien-Tanner (ePTT) constitutive equation. The elastic viscous stress splitting technique (EVSS-G) is used to separate the elastic and viscous contributions to the stress tensor together with a streamline upwind Petrov-Galerkin (SUPG) discretization of the constitutive equation. The generalized eigenvalue problem is solved using Arnoldi’s algorithm. We found that the flow becomes unstable as material elasticity exceeds a critical value due to a Hopf bifurcation suggesting that the flow becomes time-periodic. The corresponding eigenvectors indicate that the flow attains a spatially periodic structure, initiated at the die rim, extending for 2-6 gaps downstream, but is confined close to the surface of the extrudate, in agreement with the experiments. The critical conditions for instability depends on the capillary number, the fluid elastic, shear and extensional characteristics and the flow rate. . Instability is generated by the die-lip singularity causing strong extension of polymeric chains.