

# ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΡΥΠΩΝ

## 1<sup>ο</sup> ΘΕΜΑ (1,5 Μονάδες)

Στην παράδοση είχε παρουσιαστεί η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης «καθαρής συναγωγής» σε μία διάσταση, η μαθηματική δομή της οποίας είναι η εξής:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (I)$$

όπου  $\Phi$  η εξαρτημένη μεταβλητή,  $t$  ο χρόνος και  $x$  την απόσταση (κατά τον άξονα των  $x$ )

-Αν υποθέσουμε ότι εξάπλωση ενός ρύπου είναι μονοδιάστατο φαινόμενο, το οποίο δεν επηρεάζεται από τις χημικές αντιδράσεις (συμπεριλαμβανομένης και της προσρόφησης) ποιες άλλες προϋποθέσεις απαιτούνται για να μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά η μεταβολή του πεδίου της συγκέντρωσης από την εξίσωση (I);  
-Ποιο άλλο φυσικό φαινόμενο (εκτός της μεταφοράς της συγκέντρωσης και θερμοκρασίας) μπορεί να περιγράψει η εξίσωση (I);

## 2<sup>ο</sup> ΘΕΜΑ (2,5 Μονάδες)

Για την επίλυση της εξίσωσης «καθαρής συναγωγής» (εξίσωση (I), βλέπε το προηγούμενο θέμα) διακριτοποιούμε τον εξεταζόμενο χώρο με την βοήθεια κανάβου, τα σημεία του οποίου έχουν σταθερή απόσταση, ίση με  $\Delta x$ , και τον χρόνο με χρονικά βήματα σταθερού μεγέθους  $\Delta t$ .

Θεωρούμε το πεδίο ταχυτήτων σταθερό  $u$ =σταθερά και χρησιμοποιούμε τον κλασικό ορισμό του αριθμού Courant

$$Cr = \frac{u(\Delta t)}{\Delta x}$$

Στο πρόβλημα που εξετάζουμε η αρχική κατανομή της συγκέντρωσης είχε μορφή ισοσκελούς τριγώνου.

Επιλέγουμε διαδοχικά τρεις τιμές για τον αριθμό Courant

- A)  $Cr=0.5$
- B)  $Cr=1.0$
- Γ)  $Cr=2.0$

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων παίρνουν τις παρακάτω μορφές (όχι απαραίτητα με την ίδια σειρά)

- α) Το προφίλ της συγκέντρωσης υπόκειται σε ακανόνιστες ταλαντώσεις και η μορφή του μεταβάλλεται χαοτικά  
β) Το προφίλ της συγκέντρωσης διατηρεί το αρχικό τριγωνικό του σχήμα, και απλώς μετατοπίζεται (η απόσταση μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου)  
γ) Το προφίλ της συγκέντρωσης «απλώνεται» αλλά και μετατοπίζεται (η απόσταση μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου)

Συνδυάστε τις επιλογές του αριθμού Courant A), B) ,Γ) με τις χαρακτηριστικές μορφές του πεδίου συγκέντρωσης α), β) και γ).

Ποια από τις τρεις περιπτώσεις α) β) ή γ) αντιστοιχεί με την ακριβή λύση της (I);

### 3<sup>ο</sup> Θέμα 1,0 Μονάδα

Αν χρησιμοποιήσουμε ένα **ρητό σχήμα** (explicit scheme ) για την διακριτοποίηση της εξίσωσης της θερμότητας, προκύπτει για κάθε χρονικό σημείο, μία ομάδα αλγεβρικών εξισώσεων, στην οποία εμφανίζεται σε κάθε εξίσωση μόνο ένας άγνωστος (τιμή της άγνωστης μεταβλητής σε ένα σημείο του κανάβου). Προφανώς οι τιμές όλων των αγνώστων μπορούν να προσδιοριστούν άμεσα και εύκολα: η κάθε αλγεβρική εξίσωση μπορεί να επιλυθεί ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες.

Αντίθετα αν χρησιμοποιήσουμε ένα **άρρητο σχήμα** (implicit scheme ) για την διακριτοποίηση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, στις αλγεβρικές εξισώσεις που προκύπτουν εμφανίζεται παραπάνω από ένας άγνωστος σε κάθε (αλγεβρική) εξίσωση. Ένας άμεσος προσδιορισμός των αγνώστων δεν είναι πλέον δυνατός. Κατά συνέπεια είναι απαραίτητη η επίλυση ενός συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων, διαδικασία η οποία παρουσιάζει συχνά δυσκολίες.

Παρ' όλα αυτά χρησιμοποιούμε στην πράξη κατά κανόνα ένα άρρητο σχήμα τόσο για την επίλυση της εξίσωσης της θερμότητας, αλλά και για την επίλυση άλλων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους.

Εξηγείστε τους λόγους για τους οποίους γίνεται η παραπάνω επιλογή.

### 4<sup>ο</sup> Θέμα 1,5 Μονάδα

Στην παράδοση είχε παρουσιαστεί η μέθοδος Random-Walk, η οποία συνδέει τη μετακίνηση ιδεατών σωματιδίων (σύμφωνα με ειδικούς ειδικούς κανόνες) με την λύση της εξίσωσης μεταφοράς-διασποράς (ή συναγωγής-διάχυσης).

Κατά την γνώμη σας ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

- -Η μέθοδος Random-Walk απαιτεί την διαχείριση και τον υπολογισμό της κίνησης ενός μεγάλου αριθμού ιδεατών σωματιδίων.

- -Η λύση της παραπάνω εξίσωσης με τη μέθοδο Random-Walk παρουσιάζει αυξημένη «αριθμητική διασπορά» σε σχέση με την τις συμβατικές μεθόδους των πεπερασμένων στοιχείων και των όγκων ελέγχου
- -Η μέθοδος Random-Walk απαιτεί την επίλυση μεγάλων συστημάτων εξισώσεων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων .
- -Η προσομοίωση του μηχανισμού μεταφοράς (advection) {ή ισοδύναμα του μηχανισμού συναγωγής -convection-} είναι συνδεδεμένη με στοχαστική μεθοδολογία προσομοίωσης αλλά όχι ή προσομοίωση του μηχανισμού διασποράς (dispersion)
- -Η προσομοίωση του μηχανισμού διασποράς (dispersion) είναι συνδεδεμένη με στοχαστική μεθοδολογία προσομοίωσης αλλά όχι ή προσομοίωση του μηχανισμού μεταφοράς (advection)
- -Η προσομοίωση και των δυο μηχανισμών είναι συνδεδεμένη με στοχαστική μεθοδολογία προσομοίωσης
- -Η προσομοίωση κανενός από τους δύο μηχανισμούς δεν είναι συνδεδεμένη με στοχαστική μεθοδολογία προσομοίωσης

Μία αιτιολόγηση των απαντήσεων σας δεν είναι απαραίτητη

### 5<sup>ο</sup> ΘΕΜΑ (1,5 Μονάδες)

Για την επίλυση της εξίσωσης συναγωγής- διάχυσης (ή μεταφοράς-διασποράς) με ντετερμινιστικές μεθόδους και πιο συγκεκριμένα για την διακριτοποίηση του όρου της συναγωγής (ή μεταφοράς), προτείνεται η χρήση των ανάντη διαφορών ή των κεντρικών διαφορών

Σαν εργαλείο το οποίο θα διευκολύνει την επιλογή προτείνεται ο «τοπικός αριθμός Peclet» ο ορισμός του οποίου είναι ο εξής:

$$(Pe)_c = \frac{u(\Delta x)}{D}$$

όπου  $u$  η ταχύτητα,  $\Delta x$  η απόσταση μεταξύ δύο σημείων της κανάβου, και  $D$  ο συντελεστής διάχυσης ή διασποράς.

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

A) Αν  $(Pe)_c < 0.5$  είναι καλό να επιλέξουμε μία διακριτοποίηση με το σχήμα των ανάντη διαφορών

B) Αν  $(Pe)_c > 0.5$  είναι καλό να επιλέξουμε μία διακριτοποίηση με το σχήμα των ανάντη διαφορών

Γ) Αν  $(Pe)_c < 2$  είναι καλό να επιλέξουμε μία διακριτοποίηση με το σχήμα των ανάντη διαφορών

Δ) Αν  $(Pe)_c > 2$  είναι καλό να επιλέξουμε μία διακριτοποίηση με το σχήμα των ανάντη διαφορών

Μπορείτε να δώσετε μία ερμηνεία για την απάντησή σας;

### **6° ΘΕΜΑ** (1 Μονάδα)

Αναφέρατε έναν λόγο για τον οποίο οι «άμεσες μέθοδοι» επίλυσης συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (π.χ. ) παρουσιάζουν συχνά προβλήματα όσο αφορά την επίλυση συστημάτων τα οποία προκύπτουν από την διακριτοποίηση διαφορικών εξισώσεων οι οποίες περιγράφουν ροή, ή φαινόμενα μεταφοράς ρύπων, μεταφορά θερμότητας κλπ.

Αναφέρατε την ονομασία μίας «έμμεσης μεθόδου» επίλυσης

### **7° ΘΕΜΑ** (1 Μονάδα)

Κατά τη μέθοδο SIMPLE επιλύονται οι εξισώσεις Navier-Stokes με μία επαναληπτική διαδικασία, κατά την οποία σε κάθε βήμα θεωρείται σαν άγνωστος μόνο ένα από τα ζητούμενα μεγέθη του προβλήματος.

Κατά την γνώμη σας ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

- A) Για να προσδιορίσουμε την πίεση  $P$  χρησιμοποιούμε την εξίσωση Navier-Stokes ως προς  $x$
- B) Για να προσδιορίσουμε την πίεση  $P$  χρησιμοποιούμε την εξίσωση Navier-Stokes ως προς  $y$
- Γ) Για να προσδιορίσουμε την πίεση  $P$  χρησιμοποιούμε την εξίσωση Navier-Stokes ως προς  $yz$
- Δ) Για να προσδιορίσουμε την πίεση  $P$  χρησιμοποιούμε την εξίσωση της συνέχειας
- E) Καμία από τις παραπάνω προτάσεις δεν είναι αληθής

Μία αιτιολόγηση της απάντησης σας δεν είναι αναγκαία

### **8° ΘΕΜΑ** (2 Μονάδες)

Κατά τη μέθοδο SIMPLE για να λύσουμε τις εξισώσεις Navier-Stokes χρησιμοποιούμε την αναλογία με ποια από τις παρακάτω εξισώσεις

- Την εξίσωση της καθαρής συναγωγής
- Την εξίσωση της θερμότητας
- Την εξίσωση της συναγωγής-διασποράς (ή ισοδύναμα την εξίσωση μεταφοράς-διασποράς)
- Την εξίσωση Boussinesq

Μπορείτε να αιτιολογήσετε την απάντηση σας;

### **9° ΘΕΜΑ** (3 Μονάδες)

-Υ1 Περιγράψτε σύντομα το φαινόμενο της σπηλαιώσης

-Υ2 Σε ένα πρόβλημα διαχείρισης υδατικών πόρων θέλουμε να μεταφέρουμε νερό από το σημείο Α στο σημείο Β με άντληση.

Τα σημεία Α και Β έχουν πρακτικά το ίδιο γεωδαιτικό υψόμετρο. Ανάμεσα τους βρίσκεται ένας λόφος με ύψος μερικές δεκάδες μέτρα.

Στα πλαίσια μίας προκαταρκτικής μελέτης εξετάζουμε δύο εναλλακτικές λύσεις.

Τη λύση Ε1 κατά την οποία ο καταθλιπτικός αγωγός θα ακολουθήσει την συντομότερη διαδρομή και θα περάσει από τον λόφο που αναφέραμε προηγουμένως

Τη λύση Ε2 κατά την οποία ο καταθλιπτικός αγωγός θα παρακάμψει τον λόφο και θα ακολουθήσει μία χάραξη η οποία είναι πρακτικά επίπεδη.

Και στις δύο λύσεις το βάθος εκσκαφής είναι ένα μέτρο και η διατομή του αγωγού είναι κυκλική.

Υ2α Κατά την γνώμη σε ποια από τις δύο περιπτώσεις (λύση Ε1 ή λύση Ε2) μπορεί να εμφανιστεί κίνδυνος σπηλαιώσης; Σχεδιάστε ένα σκαρίφημα για να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Υ2β Σε περίπτωση κατά την οποία προέκυψε από τους υπολογισμούς ότι ο αρχικός σχεδιασμός (ταχύτητα στον αγωγό  $v=1\text{m/s}$ ) εμπεριέχει ισχυρό κίνδυνο σπηλαιώσης, ποιες αλλαγές ή ποια αλλαγή θα κάνετε ώστε να καταπολεμήσετε δραστικά το πρόβλημα; Ποιο νέο πρόβλημα ενδεχομένως να προέκυπτε από τις αλλαγές σας; Πως θα το αντιμετωπίζατε;